Capitolo 1

La circonferenza

... o se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch'un retto non avesse...
Dante, Paradiso, XIII, 101–102

Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando quel principio ond'elli indige,...
Dante, Paradiso XXXIII, 133–135

La circonferenza e la sfera sono le figure più semplici delle quali si ha forse più esperienza diretta (ad esempio un sasso che cade in uno stagno produce onde perfettamente circolari). Al contrario, la retta ed il piano sono figure idealizzate che nascono come astrazioni. È più facile costruire una circonferenza che una porzione di retta (un filo teso ruotando intorno ad un paletto permette di descrivere una circonferenza).

Indubbiamente poi la circonferenza e la sfera hanno una loro armonia, bellezza che hanno impressionato scienziati ed artisti dai primordi dell'umanità. Anzi, in alcuni casi, l'attrazione per il cerchio fu una vera ossessione per gli astronomi.

Circonferenza e sfera hanno avuto poi sempre un significato mistico: per i popoli antichi, i dischi del Sole e della Luna che li guardavano dall'alto erano fonte di mistero e di infinito potere. Così la circonferenza è divenuta figura del tempo eterno, del tempo del mito e del rito, rappresenta l'eterno ritorno, il ritmo delle stagioni, il tempo degli astri. Analogamente per la sfera, che richiamava la volta celeste e l'armonia dei movimenti delle stelle e dei pianeti.

Per qualche storico della matematica, ad esempio A. Seidenberg (cfr. [S]), la Geometria, e più in generale tutta la matematica, ha un'origine rituale, collegata cioè alla religione. La necessità di costruire altari, il desiderio di spiegare alcuni misteri tramite corrispondenze numeriche con figure e forme, l'esigenza di fissare calendari per le feste liturgiche, hanno spinto allo studio di relazioni geometriche ed osservazioni astronomiche.

In realtà, attività pratiche e significati simbolici non erano nel mondo antico tanto disgiunti come per lo più risultano oggi. In ogni caso possiamo dire che la visione pratica e quella razionale sono state entrambe fonti di ispirazione per la Geometria.

1.1 Definizioni

Nel Libro I degli *Elementi* si trovano le seguenti definizioni:

Definizione 1.1.1 (Euclide, 300 a.C.)
Def.XV *Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea (che si chiama circonferenza) tale che tutte le rette, le quali cadano sulla (stessa) linea (cioè sulla circonferenza del cerchio) a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali tra loro.*
Def.XVI *Quel punto si chiama centro del cerchio.*
Def.XVII *Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.*
Def.XVII *Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.*

All'inizio del Libro II si trovano altre 11 definizioni riguardanti sempre il cerchio, sue parti e figure ad esso collegate. Nel Libro III vengono trattate, indipendentemente dalla teoria delle proporzioni, le proprietà del cerchio.

Osservazione 1.1.2
1. Le figure considerate da Euclide sono *finite*. La *retta* è ciò che noi chiamiamo "segmento di retta". Si tratta quindi di una retta potenzialmente, ma non attualmente, infinita.
2. Ricordiamo che i Greci procedevano dal concreto all'astratto: la *definizione* è concepita non come nominale, ma come mezzo per descrivere un oggetto esistente o al quale si attribuiva esistenza (in un mondo di idee platonico). Ad es. *κύκλος* (cerchio) è l'anello, *σφαῖρα* è la palla, *περιφέρεια* (circonferenza) è la "periferia", bordo di una figura, *ἄγκών* (angolo) è la piegatura del braccio.
3. Secondo L.Russo [R], la definizione XV (di cerchio) è particolarmente interessante, poichè si tratta dell'unica definizione degli *Elementi* di cui abbiamo una versione precedente la corruzione del testo euclideo avvenuta nel III secolo. La definizione che si ritiene originale è:

> *Il cerchio è una figura piana racchiusa da una linea (tale che) tutti i segmenti incidenti su di essa (tracciati) da un punto di quelli che giacciono all'interno della figura, sono tra di loro uguali.*

Si osservi che manca la definizione esplicita di circonferenza, anche se viene usato il concetto. Per eliminare questo neo, sempre secondo L.Russo, fu inserita nell'età imperiale la definizione di circonferenza come bordo del cerchio.

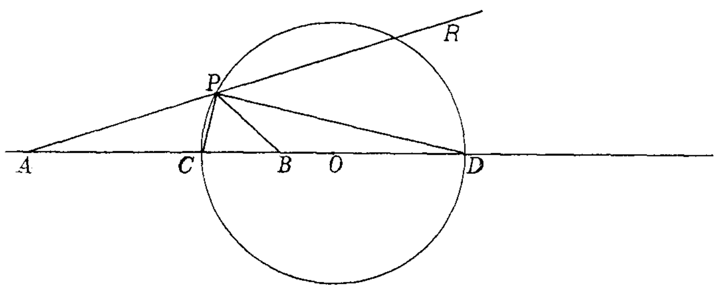
Nel corso dei secoli, prima e dopo Euclide, altre caratterizzazione della circonferenza sono state date.

A Talete si attribuisce la proposizione che il diametro divide il cerchio in due parti uguali e che gli angoli inscritti di una semicirconferenza sono retti, anzi

Proposizione 1.1.3 (Talete, 625-540 a.C. circa) *Il luogo dei punti dai quali un dato segmento è visto sotto un angolo retto è una circonferenza.*

Dimostrazione. Si fissi il segmento AB e sia C un punto da cui AB è visto sotto un angolo retto. Nel triangolo rettangolo ABC si tracci la parallela ad AC passante per il punto medio M di AB. Considerazioni sui triangoli simili dimostrano che $\overline{CM} = \overline{MB} = \overline{AB}/2$. □

Proposizione 1.1.4 (Apollonio, 225 a.C.) *Il luogo dei punti del piano le cui distanze da due punti fissati hanno un dato rapporto $k \neq 1$ è una circonferenza.*



Dimostrazione. Siano A, B i punti fissi della definizione e sia P appartenente al luogo dei punti definito; allora

$$\overline{AP} = k\overline{BP}.$$

Sia PC la bisettrice dell'angolo $A\widehat{P}B$ e PD quella dell'angolo $B\widehat{P}R$. Per il "teorema delle bisettrici" (applicato al triangolo APB)

$$AC : CB = AP : PB = AD : BD$$

dunque

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{PB} = k = \frac{AD}{BD}$$

quindi C e D non dipendono da P. Si vede inoltre che tutti i punti P del luogo vedono il segmento CD sotto un angolo retto. Pertanto, per il teorema di Talete, il luogo descritto è una circonferenza. □

Tralasciamo la dimostrazione della proposizione inversa che può ottenersi tramite considerazioni sull'*inversione rispetto alla circonferenza* (cfr. Capitolo 3), valendo la seguente proposizione.

Proposizione 1.1.5 *Se A e B sono i punti fissi della definizione di Apollonio, r è il raggio della circonferenza e O il suo centro, allora*

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2.$$

Dimostrazione. Infatti, ponendo $a = \overline{AO}$, $b = \overline{OB}$, valgono $b < r < a$ e

$$\frac{AC}{BC} = \frac{a-r}{r-b}, \qquad \frac{AD}{DB} = \frac{a+r}{r+b},$$

dunque

$$\frac{a+r}{r+b} = \frac{a-r}{r-b}$$

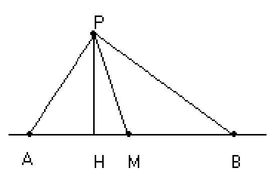
da cui segue facilmente che $ab = r^2$. □

Osserviamo che per $k = 1$ si ottiene l'asse del segmento AB. Dunque la "definizione di Apollonio" si presta ad una generalizzazione della nozione di circonferenza: una circonferenza di raggio infinito è una retta. Sembra però che la proprietà lì descritta - come afferma C.B. Boyer [Bo] - fosse già nota ad Aristotele (384-322 a.C.), che l'aveva usata per fornire una spiegazione matematica della forma semicircolare dell'arcobaleno.

Apollonio, secondo quanto riferisce Tolomeo, riteneva che i moti della Luna, del Sole e dei cinque pianeti si potessero descrivere come svolgersi su cerchi i cui centri ruotano su cerchi più grandi intorno alla Terra collocata al centro.

Proposizione 1.1.6 (Roberval, 1602–1675) *Il luogo dei punti P del piano per i quali è costante la somma dei quadrati delle distanze da due punti dati A e B è una circonferenza (avente il centro nel punto medio M del segmento AB).*

Dimostrazione. Poniamo $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2d^2$ e $\overline{AM} = \overline{MB} = r$. Sia H la proiezione ortogonale di P su AB. Allora



$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \\ = \ & \overline{AH}^2 + \overline{HP}^2 + \overline{HP}^2 + \overline{HB}^2 = \\ = \ & (\overline{AM} - \overline{HM})^2 + 2\overline{HP}^2 + (\overline{HM} + \overline{MB})^2 = \\ = \ & 2(\overline{AM}^2 + \overline{HM}^2 + \overline{HP}^2) = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MP})^2. \end{aligned}$$

Ne segue che $\overline{MP}^2 = d^2 - r^2$ per ogni punto P del luogo. Quindi, se $d > r$, P appartiene alla circonferenza di centro M e raggio $\sqrt{d^2 - r^2}$. □

La proprietà trovata da Roberval si generalizza nella seguente:

Proposizione 1.1.7 *Siano $A_1, A_2, ..., A_n$ punti del piano. Il luogo dei punti P tali che*

$$m_1\overline{PA_1}^2 + m_2\overline{PA_2}^2 + \cdots + m_n\overline{PA_n}^2 = cost$$

è una circonferenza.

Dimostrazione. Diamo una dimostrazione analitica. Se A_i ha coordinate (a_i, b_i), la condizione si traduce nella seguente:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x^2 - 2a_ix + a_i^2 + y^2 - 2b_iy + b_i^2) = k^2$$

da cui segue

$$(x^2+y^2)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) + \\ -2\left(\sum_{i=1}^{n} m_ia_i\right)x - 2\left(\sum_{i=1}^{n} m_ib_i\right)y - 2\sum_{i=1}^{n} m_i(a_i^2+b_i^2) = k^2$$

che è l'equazione di una circonferenza di centro nel baricentro dei punti A_i con pesi m_i. □

Siano x_1, x_2, x_3 coordinate omogenee nel piano affine ampliato. Una *circonferenza generalizzata* è il luogo dei punti $P(x_1, x_2, x_3)$ tali che

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3 + cx_3^2 = 0. \tag{1.1}$$

Le circonferenze generalizzate sono caratterizzate, tra le curve del secondo ordine, dalla condizione di passare per i punti (impropri) ciclici $(1, \pm i, 0)$. Se $\lambda \neq 0$ e $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, dividendo l'equazione (1.1) per x_3^2 si ottiene la nota equazione della circonferenza nel piano.

Per $\lambda = 0$ si ottiene la retta impropria e in generale una retta propria.

Concludiamo ricordando che la circonferenza è l'unica curva (chiusa) piana avente curvatura costante non nulla (uguale ad $1/R$, dove R è il raggio della circonferenza).

1.2 La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio

Data una circonferenza $\mathcal{C}$ consideriamo l'insieme $A(\mathcal{C})$ dei perimetri dei poligoni inscritti in $\mathcal{C}$ e l'insieme $B(\mathcal{C})$ dei perimetri dei poligoni circoscritti a $\mathcal{C}$. Si dimostra che tali insiemi sono contigui in $\mathbb{R}$ (vedi e.g. [EA], Capitolo 5), quindi per l'assioma di Dedekind esiste un unico elemento di separazione. Tale numero reale $l(\mathcal{C})$ è detto *lunghezza della circonferenza* $\mathcal{C}$.

Vale inoltre il seguente teorema (per la cui dimostrazione si rimanda ancora [EA]).

Teorema 1.2.1 *Le lunghezze di due circonferenze stanno fra loro come i rispettivi raggi.*

Definizione 1.2.2 *Data una circonferenza* $\mathcal{C}$ *di raggio* r*, si pone*

$$\pi := \frac{l(\mathcal{C})}{2r}.$$

Tale rapporto, per il teorema precedente, risulta essere indipendente dalla circonferenza fissata.

Nel libro *La misura del cerchio*, Archimede stabilisce i seguenti tre teoremi:

Teorema 1.2.3 (Archimede, 287-212 a.C.)
1. *Il cerchio è equivalente ad un triangolo che ha per base la lunghezza della circonferenza e per altezza il raggio.*
2. *Il cerchio è equivalente approssimativamente ad* $11/14$ *di un quadrato che ha come lato il diametro del cerchio.*
3. *La lunghezza della circonferenza è compresa tra* $3 + 1/7$ *e* $3 + 10/71$ *volte il diametro.*

Archimede ottenne la stima in **3.** partendo da due esagoni regolari, uno inscritto e l'altro circoscritto alla circonferenza, e spingendosi, raddoppiando il numero dei lati, sino a poligoni con 96 lati.

Osservazione 1.2.4 Il problema del calcolo della lunghezza di una circonferenza e dell'area del cerchio si è imposto per motivi di ordine pratico sin da epoche remotissime e si trovano regole empiriche per tale calcolo in vari documenti di tutte le più antiche civiltà (vedi [GR]). Nel Papiro Rhind, risalente al 1650 a.C. circa, lo scriba egizio Ahmes scrive:

> *Togli 1/9 ad un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio.*

Tale metodo implica per il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro il valore 3,16049.... che si discosta di meno dell'un per cento dal valore di π (circa 3,141592).... Il risultato contenuto nel Papiro Rhind non ebbe molta diffusione: infatti mille anni dopo i babilonesi e gli ebrei continuavano ad usare 3 come valore approssimato.

Nel Papiro Rhind c'è anche il primo tentativo documentato di quadrare il cerchio, cioè di costruire un quadrato avente la stessa area del cerchio. Furono i

Greci ad affrontare tale problema più rigorosamente, chiedendosi se fosse possibile quadrare il cerchio usando solo riga e compasso (cioè rette e circonferenze). Vari tentativi furono fatti da Anassagora di Clazomene, Antifonte il Sofista e Ippocrate di Chio nel V secolo a.C.. Ad Ippocrate si attribuisce anche una prima dimostrazione della proporzionalità dell'area del cerchio al quadrato del raggio. La dimostrazione di tale risultato riportata negli Elementi di Euclide (Libro XII, Prop.2), basata sul metodo di esaustione, è attribuita ad Eudosso di Cnido (408-355 a.C.).

L'ultima parola del mondo antico sul calcolo dell'area del cerchio la espresse Archimede con il teorema citato precedentemente.

Il problema della quadratura del cerchio, tramite riga e compasso, rimase aperto sino al 1882, quando il tedesco F.Lindemann dimostrò che π è un numero trascendente, cioè non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. Da ciò discende l'impossibilità di trasformare, utilizzando solo riga e compasso, un cerchio in un poligono equivalente.

Già un secolo prima, nel 1770, J.H.Lambert (che ritroveremo nel Capitolo 4), aveva dimostrato l'irrazionalità di π, ponendo fine alla speranza di conoscere il valore esatto di π.

Infine, osserviamo che nessuno usò un simbolo specifico per denotare il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro, sino a circa 250 anni fa. Sembra che il primo ad usare il simbolo π sia stato l'inglese William Jones nel 1706, ma la notazione si diffuse definitivamente dopo la pubblicazione nel 1748 della *Introductio in analysin infinitorum* del grande matematico svizzero Leonhard Euler (1707–1783), chiamato dai suoi contemporanei "l'analisi incarnata".

1.3 Simmetrie e circonferenza

Diamo ora un'altra descrizione della circonferenza, utile anche come costruzione, a partire da simmetrie assiali.

Siano r ed s due rette incidenti in C, formanti un angolo uguale a $\theta/2$; allora, indicando con σ_a la simmetria ortogonale rispetto ad una retta a, si ha che

$$\sigma_r \circ \sigma_s = \rho(C, \theta),$$

dove $\rho(C, \theta)$ è la rotazione intorno a C d'angolo θ.

È chiaro che

$$\rho(C, \theta) \circ \rho(C, \theta') = \rho(C, \theta + \theta')$$

dunque $\rho = \rho(C, \theta)$ ha ordine $m \in \mathbb{N}$ se

$$m\theta = 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

essendo $\rho(C, 2k\pi) = id$. Quindi

$$\rho \text{ ha ordine } m \text{ finito } \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\theta} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$$

cioè θ è commensurabile con π.

In tal caso $\{\rho, \rho^2, \ldots, \rho^m\}$ è un gruppo ciclico di ordine m; quindi eseguendo tutte le simmetrie rispetto ad r e ad s, a partire da un punto P, otteniamo un numero finito di punti, giacenti sulla circonferenza di centro P e raggio CP.

Se invece $2\pi/\theta$ è irrazionale, cioè θ è incommensurabile con π, quell'insieme di punti è infinito, anzi denso nella circonferenza.

Si conclude allora che

Proposizione 1.3.1 *La curva simultaneamente simmetrica rispetto a due rette incidenti, formanti un angolo incommensurabile con π è una circonferenza.*

Si osservi che per rette, disegnate sullo schermo di un computer, $\text{tg}(\theta/2)$ è certamente razionale e quindi, per un teorema di Eulero, θ è "genericamente" irrazionale.

1.4 Il teorema isoperimetrico

Il problema che ci poniamo è il seguente:

> *Fra tutte le curve piane (semplici e) chiuse che delimitano una porzione di piano ed hanno lo stesso perimetro, qual è quella che racchiude la maggiore area?*

Ebbene, se consideriamo n-agoni con il medesimo perimetro, già Zenodoro (circa 180 a.C.) provò che l'n-agono regolare ha l'area massima.

In generale vale:

Teorema 1.4.1 *Fra tutte le figure piane di ugual perimetro il cerchio ha l'area massima.*

Fra tutte le figure di uguale area il cerchio ha il perimetro minimo.

I due problemi sono equivalenti, basta scambiare le parole *massimo* con *minimo* e *perimetro* con *area*.

J.Steiner (1796–1863), un geometra di eccezionale valore e grande inventiva, si occupò profondamente della geometria dei cerchi e delle sfere ed escogitò varie dimostrazioni del teorema isoperimetrico. Una delle sue idee consisteva nel dimostrare che la figura massimale (supposta esistente) deve essere necessariamente convessa e simmetrica rispetto ad ogni retta che ne divida il perimetro in due parti uguali.

Un'altra dimostrazione è fondata sull'idea che la figura massimale deve avere un asse di simmetria in ogni direzione. Dapprima si fa vedere che, data una figura convessa, si può costruire un'altra figura con perimetro non maggiore e con asse di simmetria in una direzione data arbitraria. Fissata un'altra direzione, il teorema isoperimetrico segue da un procedimento iterativo e dalla Proposizione 1.3.1.

Dal teorema segue anche la celebre *disuguaglianza isoperimetrica*: se $\mathcal{A}(F)$ è l'area di una figura F e $\mathcal{P}(F)$ è il suo perimetro, allora

$$\mathcal{P}(F)^2 \geq 4\pi\mathcal{A}(F).$$

Osservazione 1.4.2 Il problema di massimizzare un'area è molto antico ed è noto anche come *problema di Didone* (Eneide I, 360–368):

> ... *quanta cerchiar di un bue potesse un tergo.*

I Greci però studiarono questi problemi con metodi puramente geometrici, mantenendosi quindi lontani dai procedimenti propri del "Calcolo delle variazioni", ramo della matematica nato sul finire del sec. XVII, per opera in particolare dei fratelli Bernoulli, in connessione a problemi di massimo e di minimo di funzionali che dipendono da una o più curve o superficie (ad es. curva di minima lunghezza tra due punti dati o geodetica[1], curva di minimo tempo o brachistocrona, superficie di area minima, bolle di sapone). Le questioni di massimo e di minimo hanno sempre avuto un grande valore anche nell'interpretazione dei fenomeni naturali, perché su questi domina un principio generale di *economia*: la natura, nelle sue manifestazioni, tende a risparmiare il più possibile l'energia che deve impiegare.

Eulero diceva che, essendo la costruzione del mondo la più perfetta possibile, come quella di un Creatore infinitamente saggio, in natura nulla avviene che non presenti proprietà di massimo o di minimo. Ad esempio Erone, Fermat e Huygens hanno dedotto da un principio di minimo le leggi della riflessione, della rifrazione e della propagazione generale della luce; Hamilton ha studiato un profondo legame tra la meccanica e l'ottica, mentre H.R.Hertz (1857-1894) ha enunciato un principio di inerzia molto generale:

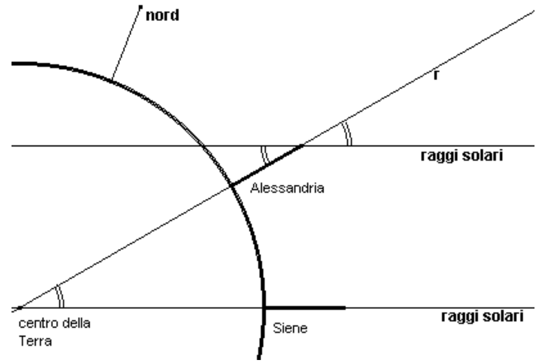
> *Un punto, che si muove su una superficie, per inerzia segue una geodetica della superficie stessa.*

Se la superficie è un piano, allora le geodetiche sono le rette euclidee.

1.5 Un'applicazione geografica

Si può ricostruire l'intera circonferenza a partire da un qualsiasi piccolo arco. Questa proprietà permise ad Eratostene di Cirene (200 a.C.) di dedurre la misura dell'intera circonferenza della Terra dal piccolo arco compreso tra Alessandria e Siene (oggi Assuan), che si trova a sud di Alessandria, quasi sullo stesso meridiano. Quando il sole si trova direttamente allo zenit ad Assuan (a mezzogiorno del solstizio d'estate), si misura l'angolo formato tra la direzione del Sole e la verticale ad Alessandria usando l'ombra di un palo verticale (lo gnomone).

[1]Sul concetto di geodetica si veda l'Appendice.



Come afferma Ossermann [O], la geniale semplicità del metodo di Eratostene non è sminuita dal fatto che la sua stima implicava varie imprecisioni ed incertezze. Secondo Eratostene la circonferenza era di 250.000 stadi. La lunghezza di uno *stadio* era pari a 500 *piedi*, ma la lunghezza del piede non era universale. Tuttavia la stima di Eratostene (corrispondente a 40.000 km) fornisce una testimonianza impressionante di un ragionamento geometrico semplice, ma ingegnoso, che permette di conseguire il successo là dove un approccio diretto era molto al di fuori delle possibilità pratiche di realizzazione. Era il tentativo di "misurare il non misurabile".

È interessante notare che, dopo Eratostene, l'arco di meridiano fu misurato nuovamente solo nell'800 circa a Baghdad, sotto il regno del califfo al Mamun, che regnò dall'813 all'833 (cfr. [Y]).